Dr. Emanuel Scheidegger
Dipl. Math. Julia Eich

Modulformen I
WS 09/10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 9

Ableitungen von Modulformen

33. Einige Transformationsformeln der Ramanujan– und Maass–Ableitung.

    (a) (2 Punkte) Sei $f \in M_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt:

    $$D^n f = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{(k+r)_{n-r}}{(4\pi y)^{n-r}} \partial^r f$$

    (b) (2 Punkte) Sei $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt:

    $$(c\tau + d)^{-k-2r}(D^r f)(\gamma \cdot \tau) =$$
    $$\sum_{i=0}^{p+r} \left(\sum_{j=0}^{r} \frac{j!}{(2\pi i)^j} \binom{r}{j} \binom{k+r-i+j-1}{j} D^{r-j} f_{i-j}(\tau) \right) \left(\frac{c}{c\tau + d} \right)^i$$

    für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\gamma \in \Gamma_1$.

34. Weitere Kongruenzen für die Ramanujan τ–Funktion.

    (a) (2 Punkte) Benützen Sie die Relationen zwischen geeigneten Eisensteinreihen, um σ_5 durch σ_1 und σ_3, und σ_7 durch σ_1 und σ_5 auszudrücken.

    (b) (2 Punkte) Benützen Sie die Rankin-Cohen-Klammer von geeigneten Eisensteinreihen, um zu zeigen, dass $\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \bmod 7$ und $\tau(n) \equiv n\sigma_9(n) \bmod 5^2$.

35. Die Quasimodulformen als Poisson–Algebra.
    (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $(\widetilde{M}_*(\Gamma_1), [\ ,\ ]_0, [\ ,\ ]_1)$ eine Poisson–Algebra ist.

36. Die Chazy–Gleichung

    (a) (2 Punkte) Sei $n \geq 0$, $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq s)}$, $g \in \widetilde{M}_l^{(\leq t)}$. Zeigen Sie, dass es ein $h \in \widetilde{M}_{k+l+2n}^{(\leq s+t)}$ gibt, so dass $[f, \Delta g]_n = \Delta h$.

(b) (2 Punkte) Benützen Sie Aufgabe (a) dreimal hintereinander mit geeigneten f, g, h, oder eine andere Methode, um zu zeigen, dass E_2 die Chazy–Gleichung $D^3u - uD^2u + \frac{3}{2}(Du)^2 = 0$ erfüllt.

Abgabetermin: Freitag, 18.12.2009 um 10:00 Uhr.